Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, documento

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, bianco

Descrizione generata automaticamente

Dimostriamo che L2 = {⟨M, w⟩ | M accetta la stringa ww^R} è indecidibile:

Useremo una riduzione dal problema dell’arresto A\_TM = {⟨M, w⟩ | M si ferma su input w}.

Definiamo una funzione f che mappa ⟨M, w⟩ in ⟨M', w⟩, dove M' è una TM che:

1. Su input x: a. Se x non ha la forma yy^R, rifiuta. b. Altrimenti, estrae y dalla prima metà di x. c. Simula M su y. d. Se M si ferma su y, accetta. Altrimenti, cicla.

Ora, ⟨M, w⟩ ∈ A\_TM se e solo se ⟨M', w⟩ ∈ L2. Infatti, M' accetta ww^R se e solo se M si ferma su w.

Poiché A\_TM è indecidibile e abbiamo una riduzione da A\_TM a L2, concludiamo che L2 è indecidibile.

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, documento

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, linea

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata

Descrizione generata automaticamenteImmagine che contiene testo, schermata, Carattere, documento

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, linea

Descrizione generata automaticamente

Useremo una riduzione dal problema della fermata (Halting Problem), che sappiamo essere indecidibile.

Sia H = {⟨M, w⟩ | M è una TM che si ferma su input w}

Costruiamo una funzione di riduzione f da H a Forty-Two:

f(⟨M, w⟩) = ⟨M'⟩, dove M' è una TM che:

1. Simula M su input w
2. Se M si ferma, M' cancella il suo nastro e scrive 42
3. Se M non si ferma, M' continua a girare all'infinito

Ora, ⟨M, w⟩ ∈ H se e solo se ⟨M'⟩ ∈ Forty-Two.

Se Forty-Two fosse decidibile, potremmo decidere H usando questa riduzione, che è una contraddizione. Quindi Forty-Two è indecidibile.

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, algebra

Descrizione generata automaticamente

Useremo una riduzione dal problema della fermata (A\_TM), che sappiamo essere indecidibile.

Sia f una funzione che mappa ⟨M, w⟩ a ⟨M'⟩, dove M' è definita come segue:

M' = "Su input n:

1. Se n è dispari, entra in un loop infinito
2. Se n è pari, simula M su input w
3. Se M si ferma su w, M' si ferma
4. Se M non si ferma su w, M' entra in un loop infinito"

Ora, ⟨M, w⟩ ∈ HALTS se e solo se ⟨M'⟩ ∈ EVEN-HALTS.

Se EVEN-HALTS fosse decidibile, potremmo decidere A\_TM usando questa riduzione, che è una contraddizione. Quindi EVEN-HALTS è indecidibile.

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, documento

Descrizione generata automaticamenteImmagine che contiene testo, schermata, Carattere, linea

Descrizione generata automaticamenteImmagine che contiene testo, schermata, Carattere, documento

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, numero

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamente

Per dimostrare che 2023\_TM è indecidibile, riduciamo il problema della fermata A\_TM a 2023\_TM.

Sia R un decisore ipotetico per 2023\_TM. Costruiamo un decisore S per A\_TM:

S = "Su input ⟨M,w⟩:

1. Costruisci una TM M' che:
   * Scrive w sul nastro
   * Si sposta alla cella 2023
   * Simula M su w
   * Se M si ferma, M' si sposta alla cella 2022
2. Esegui R su ⟨M'⟩
3. Se R accetta, accetta. Se R rifiuta, rifiuta."

S decide correttamente A\_TM perché:

* M si ferma su w ⇔ M' si sposta dalla cella 2023 alla 2022 ⇔ R accetta ⟨M'⟩ ⇔ S accetta ⟨M,w⟩

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, linea

Descrizione generata automaticamenteMa sappiamo che A\_TM è indecidibile, quindi 2023\_TM deve essere indecidibile

(a) Formuliamo SUM\_TM come: SUM\_TM = {⟨M⟩ | M è una TM che, dati due numeri binari x e y separati da #, termina con x+y (in binario) sul nastro}

(b) Per dimostrare che SUM\_TM è indecidibile, riduciamo A\_TM a SUM\_TM.

Sia R un decisore ipotetico per SUM\_TM. Costruiamo un decisore S per A\_TM:

S = "Su input ⟨M,w⟩:

1. Costruisci una TM M' che:
   * Su input x#y:
     + Ignora x e y
     + Simula M su w
     + Se M si ferma, calcola x+y e lo scrive sul nastro
2. Esegui R su ⟨M'⟩
3. Se R accetta, accetta. Se R rifiuta, rifiuta."

S decide correttamente A\_TM perché:

* M si ferma su w ⇔ M' somma correttamente per ogni input ⇔ R accetta ⟨M'⟩ ⇔ S accetta ⟨M,w⟩

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, linea

Descrizione generata automaticamenteMa sappiamo che A\_TM è indecidibile, quindi SUM\_TM deve essere indecidibile.

1. (a) Formuliamo MUL\_TM come: MUL\_TM = {⟨M⟩ | M è una TM che, dati due numeri binari x e y separati da #, termina con x\*y (in binario) sul nastro}

(b) Per dimostrare che MUL\_TM è indecidibile, riduciamo A\_TM a MUL\_TM.

Sia R un decisore ipotetico per MUL\_TM. Costruiamo un decisore S per A\_TM:

S = "Su input ⟨M,w⟩:

1. Costruisci una TM M' che:
   * Su input x#y:
     + Ignora x e y
     + Simula M su w
     + Se M si ferma, calcola x\*y e lo scrive sul nastro
2. Esegui R su ⟨M'⟩
3. Se R accetta, accetta. Se R rifiuta, rifiuta."

S decide correttamente HALT\_TM perché:

* M si ferma su w ⇔ M' moltiplica correttamente per ogni input ⇔ R accetta ⟨M'⟩ ⇔ S accetta ⟨M,w⟩

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, algebra

Descrizione generata automaticamenteMa sappiamo che A\_TM è indecidibile, quindi MUL\_TM deve essere indecidibile.

a) Formulazione come linguaggio: QPALTM = {w | w è una stringa quasi-palindroma su {0,1}\*} dove una stringa è quasi-palindroma se rimane uguale letta da sinistra a destra e da destra a sinistra, eccetto al più una stringa.

(b) Dimostrazione che QPALTM è indecidibile: Riduzione dal problema della fermata (A\_TM). Costruiamo una TM M' che, dato input ⟨M,w⟩:

1. Simula M su w.
2. Se M si ferma su w, M' produce l'output 1001001.
3. Se M non si ferma, M' entra in un loop infinito.

Ora, definiamo una funzione f che mappa ⟨M,w⟩ in 1001001. f è una riduzione da A\_TM a QPALTM perché:

* Se M si ferma su w, f(⟨M,w⟩) = 1001001 ∈ QPALTM
* Se M non si ferma su w, f(⟨M,w⟩) ∉ QPALTM

Poiché A\_TM è indecidibile, QPALTM deve essere indecidibile.

Immagine che contiene testo, schermata, Viso umano, cartone animato

Descrizione generata automaticamente

(a) Formulazione come linguaggio: GROSS\_TM = {⟨M⟩ | M è una TM e L(M) contiene almeno un grawlix}

(b) Dimostrazione che GROSS\_TM è indecidibile:

Riduzione dal problema della fermata (HALT\_TM). Costruiamo una TM M' che, dato input ⟨M,w⟩:

1. Simula M su w.
2. Se M si ferma su w, M' produce l'output "@#$%&!".
3. Se M non si ferma, M' entra in un loop infinito.

Ora, definiamo una funzione f che mappa ⟨M,w⟩ in ⟨M'⟩. f è una riduzione da HALT\_TM a GROSS\_TM perché:

* Se M si ferma su w, L(M') contiene un grawlix, quindi ⟨M'⟩ ∈ GROSS\_TM
* Se M non si ferma su w, L(M') = ∅, quindi ⟨M'⟩ ∉ GROSS\_TM

Poiché HALT\_TM è indecidibile, GROSS\_TM deve essere indecidibile.

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata

Descrizione generata automaticamente(a) EXT\_M = {〈B, w〉 | B è una TM M ed esiste una stringa ww ∈ {0,1}\* tale che ww ∈ L(M)}

(b) Dimostrazione che EXT\_M è indecidibile per contraddizione riducendo il problema dell'accettazione A\_TM. Supponiamo per assurdo che EXT\_M sia decidibile e sia H una TM che lo decide. Costruiamo la TM D: D = "Su input 〈M, w〉:

1. Costruisci la TM M' che accetta se l'input è nella forma xx e x ∈ L(M), rifiuta altrimenti
2. Esegui H su input 〈M', w〉
3. Se H accetta rifiuta, se H rifiuta accetta"

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, informazione

Descrizione generata automaticamenteD decide A\_TM: Se 〈M,w〉 ∈ A\_TM allora w ∈ L(M), quindi ww ∈ L(M') e 〈M',w〉 ∈ EXT\_M, quindi H accetta e D rifiuta Se 〈M,w〉∉A\_TM allora w ∉ L(M), quindi ww ∉L(M') e 〈M',w〉∉EXT\_M, quindi H rifiuta e D accetta Ma A\_TM è indecidibile, quindi abbiamo una contraddizione e EXT\_M non può essere decidibile.

(a) PAL\_TM = {〈M〉 | M è una TM e L(M) ⊆ {0,1}\* è palindromo}

(b) PAL\_TM è indecidibile. Dimostrazione per riduzione dal problema della cofinalità E\_TM = {〈M〉 | L(M) = ∅}. Costruiamo la funzione di riduzione f: f(〈M〉) = 〈M̂〉 dove M̂ è la TM che su input w ∈ {0, 1}\*:

1. Simula M su input ε
2. Se M accetta, accetta se w = w^R, rifiuta se w ≠ w^R
3. Se M non accetta, accetta qualunque input w

Se 〈M〉 ∈ E\_TM allora L(M) = ∅, quindi L(M̂) = {0,1}\* che è palindromo, perciò 〈M̂〉 ∈ PAL\_TM. Se 〈M〉 ∉ E\_TM allora L(M) ≠ ∅, quindi L(M̂) = {w ∈ {0,1}\* | w = w^R} che non è palindromo, perciò 〈M̂〉 ∉ PAL\_TM. Siccome E\_TM è indecidibile e si riduce a PAL\_TM, anche PAL\_TM è indecidibile.